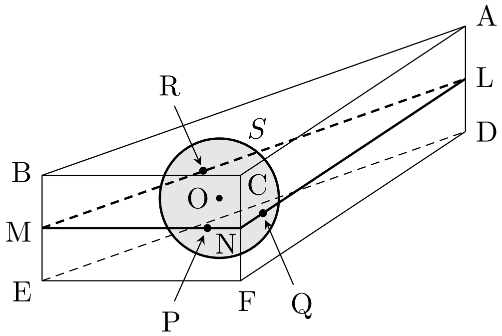
令和７年度 学力検査問題 数学 解答

1

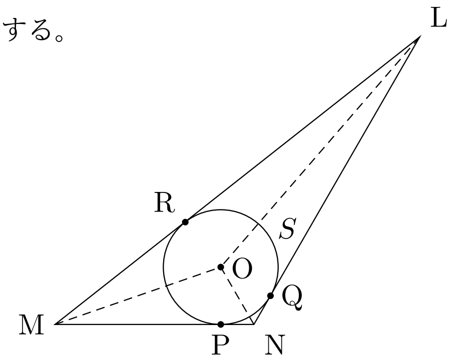


(1) △ABC において，余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + CA^2 - 2\,BC \cdot CA \cos \angle BCA \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 120^\circ \\ &= 36 + 100 - 2 \cdot 60 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196. \end{aligned}$$

よって $AB = \mathbf{14}$.

(2) 辺 AD, BE, CF の中点をそれぞれ L, M, N とする。また，球 S と面 BEFC, CFDA, ADEB との接点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，P, Q, R, O はいずれも平面 LMN 上にあるので，この図形の平面 LMN による切り口は右図のようになる。ここで，$\triangle LMN \equiv \triangle ABC$ である。また，球 S の半径を r とすると，平面 LMN による球 S の切り口は O を中心とする半径 r の円であり，かつ △LMN の内接円である。さらに，この内接円と辺 MN, NL, LM との接点がそれぞれ P, Q, R である。



△LMN の面積を 2 通りで考えて，

$$\frac{1}{2}(MN + NL + LM)\,r = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot NL \sin \angle MNL$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(6 + 10 + 14)\,r = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \sin 120^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 15r = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \boldsymbol{\sqrt{3}}.$$

また，球 S は面 ABC，面 DEF の両方に接するので，BE は球 S の直径に等しい。よって，$BE = 2r = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$.

(3) $LQ = LR = x$, $MR = MP = y$, $NP = NQ = z$ とおくと，

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ y + z = 6 \\ z + x = 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \\ z = 1. \end{cases}$$

よって，特に $PM = y = 5$.

OP, PM, ME は，どの 2 つも垂直で，$OP = \sqrt{3}$, $PM = 5$, $ME = \sqrt{3}$ なので，三平方の定理より

$$OE^2 = OP^2 + PM^2 + ME^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 + 25 + 3 = 31.$$

したがって，$OE = \boldsymbol{\sqrt{31}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) n 回目の操作で初めて 1 の目が出るための条件は，1 回目から $n-1$ 回目までの操作で常に 2 以上の目が出て，かつ n 回目の操作で 1 の目が出ることである。よって，このようになる確率 p_n は，

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}.$$

(2) (i) $n \geqq 7$ のとき，n 回目の操作で終了するための条件は，

- 1 回目から $n-1$ 回目までの操作で，1 の目が 6 回，2 以上の目が $n-7$ 回出て，
- かつ，n 回目の操作で 1 の目が出る

ことである。よって，このようになる確率 q_n は，

$$q_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_6 \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-7} \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{{}_{n-1}\mathrm{C}_6 \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-7}}.$$

(ii) $n \geqq 7$ のとき，

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-5)}{6!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^7\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-6}}{\dfrac{(n-1)\cdots(n-5)(n-6)}{6!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^7\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-7}} = \frac{n\cdot\dfrac{5}{6}}{n-6} = \frac{5n}{6(n-6)} = \frac{5n}{6n-36}.$$

よって，$\dfrac{q_{n+1}}{q_n} > 1 \iff \dfrac{5n}{6n-36} > 1 \iff 5n > 6n-36 \iff n < 36.$

同様にして，$\dfrac{q_{n+1}}{q_n} < 1 \iff n > 36,\quad \dfrac{q_{n+1}}{q_n} = 1 \iff n = 36$ なので，

- $7 \leqq n \leqq 35$ のとき $q_n < q_{n+1}$
- $n = 36$ のとき $q_n = q_{n+1}$
- $n \geqq 37$ のとき $q_n > q_{n+1}$

である。よって，$q_7 < q_8 < \cdots < q_{35} < q_{36} = q_{37} > q_{38} > \cdots$

となるので，q_n の値が最大となる n は，$n = \mathbf{36}$，$\mathbf{37}$.

3 $C : 3x^2 + y^2 = 12 \ \cdots\cdots①$

(1) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る傾き m の直線の方程式は，$y = m(x-a)+b \ \cdots\cdots②$

② が ① に接するための条件は，② を ① へ代入して得られる x についての方程式

$$3x^2 + \{m(x-a)+b\}^2 = 12 \ \cdots\cdots③$$

が重解をもつことである。ここで，

$$\begin{aligned} ③ \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 + \{mx-(ma-b)\}^2 = 12 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(m^2+3\right)x^2 - 2m(ma-b)x + \left\{(ma-b)^2-12\right\} = 0 \ \cdots\cdots④ \end{aligned}$$

なので，④ が x の方程式として重解を持つための条件は，④ の判別式 D について

$$\frac{D}{4} = \{m(ma-b)\}^2 - \left(m^2+3\right)\left\{(ma-b)^2-12\right\} = 0 \ \cdots\cdots⑤$$

となることである。したがって，求める必要十分条件は，

$$\begin{aligned} ⑤ \quad &\Leftrightarrow \quad m^2(ma-b)^2 - \left\{m^2(ma-b)^2 + 3(ma-b)^2 - 12m^2 - 36\right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\left\{3(ma-b)^2 - 12m^2 - 36\right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (ma-b)^2 - 4m^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\left(a^2-4\right)m^2 - 2abm + \left(b^2-12\right) = 0} \ \cdots\cdots⑥ \end{aligned}$$

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から曲線 C へ直交する 2 本の接線が引けるための条件は，次の I), II) のいずれかが成立することである。

I) **2 接線がいずれも y 軸に平行でないとき**

「⑥ が m の方程式として異なる 2 つの実数解をもち，かつその積が -1」

$\Leftrightarrow$ 「$a^2-4 \neq 0$ かつ $\dfrac{b^2-12}{a^2-4} = -1$」（このとき，⑥ は異なる 2 実数解をもつ）

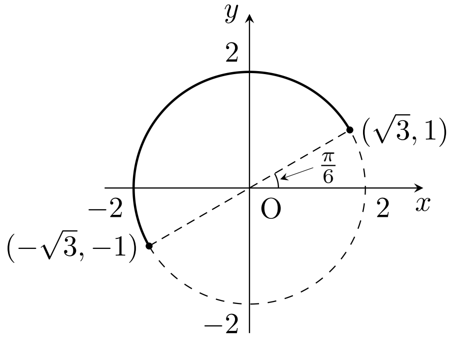
$\Leftrightarrow$ 「$a \neq \pm 2$ かつ $a^2+b^2 = 16$」

II) **一方の接線が $\boldsymbol{y}$ 軸に平行であるとき**

y 軸に平行な C の接線は $x = \pm 2$ のいずれかである。このとき，これらに直交するもう一方の接線は x 軸に平行なので，$y = \pm 2\sqrt{3}$ のいずれかである。よって，これらの交点である $(a,\ b) = (\pm 2,\ \pm 2\sqrt{3})$（複合任意）の 4 点が，条件を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ である。

ここで，4 点 $(a,\ b) = (\pm 2,\ \pm 2\sqrt{3})$（複合任意）は 「$a = \pm 2$ かつ $a^2+b^2 = 16$」に一致するので，「I) または II)」より，求める点 P の軌跡は **円 $\boldsymbol{x^2+y^2=16}$** である。

4 $\quad f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta-k}{-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}}$



(1) $\mathrm{P}(-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$.

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\begin{cases} x=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta \end{cases}$

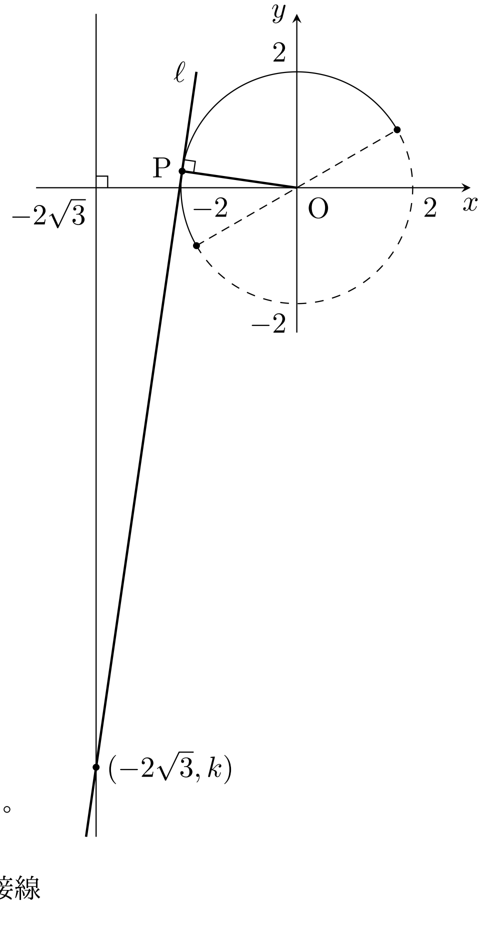
このとき，

$$x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$y=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right).$$

よって，$\mathrm{P}\left(2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right),\ 2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ となるので，これは，原点を中心とする半径 2 の円の周上で，偏角が $\theta+\dfrac{\pi}{6}$ の点である。$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ なので，点 P の軌跡は **右上図** のような半円（端点を含む）である。

(2) (i) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$f(\theta)=\dfrac{y-k}{x-\left(-2\sqrt{3}\right)}$.



よって，$f(\theta)$ は，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $(-2\sqrt{3},\ k)$ を結んで得られる直線 ℓ の傾きに等しい。

$k\geqq2$ ならこの傾きは常に 0 以下なので，$f(\theta)$ の最大値 $4\sqrt{3}$ が正であることより，$k<2$ である。

一方で $k<2$ のとき，直線 ℓ の傾きは，ℓ が円 $x^2+y^2=4$ と第 2 象限内の点で接するとき最大である。

このときの ℓ の傾きが $4\sqrt{3}$ なので，接点 P について，$\ell\perp\mathrm{OP}$ より OP の傾きは $-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ である。

よって，$\mathrm{P}\left(-4\sqrt{3}t,\ t\right)$ $(t>0)$ とかけるので，円 $x^2+y^2=4$ 上にあることから，

$$\left(-4\sqrt{3}t\right)^2+t^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad 49t^2=4.$$

$t>0$ より $t=\dfrac{2}{7}$. 　よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{8}{7}\sqrt{3},\ \dfrac{2}{7}\right)$ である。

よって，円 $x^2+y^2=4$ の $\left(-\dfrac{8}{7}\sqrt{3},\ \dfrac{2}{7}\right)$ における接線

$$y=4\sqrt{3}\left(x+\frac{8}{7}\sqrt{3}\right)+\frac{2}{7}\ \cdots\cdots①$$

と $x=-2\sqrt{3}$ の交点の y 座標が k である。① に $x=-2\sqrt{3}$ を代入して，

$$y=4\sqrt{3}\left(-2\sqrt{3}+\frac{8}{7}\sqrt{3}\right)+\frac{2}{7}=4\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{6}{7}\sqrt{3}\right)+\frac{2}{7}=-10.$$

よって，$k=\mathbf{-10}$.

(ii) $f(\theta)=4\sqrt{3}$ となるとき，

$$\begin{cases} -\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=-\dfrac{8}{7}\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{7} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos\theta=-\dfrac{11}{14} \\ \sin\theta=\dfrac{5}{14}\sqrt{3} \end{cases}$$

よって，$\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{11}{14}}$.

5

(1) 等比数列の和の公式より

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{3k-3}=\sum_{k=1}^{n}\left(-x^3\right)^{k-1}=\frac{1-\left(-x^3\right)^n}{1-(-x^3)}=\frac{1}{1+x^3}+(-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{1+x^3}.$$

(2) $$\frac{A(2x-1)}{x^2-x+1}+\frac{B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}=\frac{2Ax+(-A+B)}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}$$
$$=\frac{\{2Ax+(-A+B)\}(x+1)+C\left(x^2-x+1\right)}{(x^2-x+1)(x+1)}$$
$$=\frac{(2A+C)x^2+(A+B-C)x+(-A+B+C)}{x^3+1}$$

これが恒等的に $\dfrac{1}{x^3+1}$ に等しくなるための条件は,

$$\begin{cases}2A+C=0\\ A+B-C=0\\ -A+B+C=1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \text{「}\boldsymbol{A=-\frac{1}{6}}\ \text{かつ}\ \boldsymbol{B=\frac{1}{2}}\ \text{かつ}\ \boldsymbol{C=\frac{1}{3}}\text{」}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $x^3+1\geqq 1$, $x^{3n}\geqq 0$ なので，$0\leqq\dfrac{x^{3n}}{1+x^3}\leqq x^{3n}$.　よって，

$$0\leqq\int_0^1\frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx\leqq\int_0^1 x^{3n}\,dx=\left[\frac{1}{3n+1}x^{3n+1}\right]_0^1=\frac{1}{3n+1}.$$

(4) $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ と置換するとき，

x	0	$\to$	1
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

, $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$.　よって，

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\tan^2\theta+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{\sqrt{3}}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

(5) $$\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{3k-3}\right\}dx=\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{3k-2}x^{3k-2}\right]_0^1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}$$

なので，(1), (2), (4) より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}=\int_0^1\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{3k-3}\right\}dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x^3}+(-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{1+x^3}\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+(-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{1+x^3}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}\log\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\log(x+1)\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\log 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx\ \cdots\cdots①$$

ここで，(3) から，はさみうちの原理より $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx \to 0 \quad (n \to \infty)$ なので，① より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}.$$